Gliederung

1. Einleitung

Der Autor setzt sich mit Leonhard Euler auseinander, da er ein besonderes Interesse an dessen mathematischen Arbeiten hat und selbst dem sächsischen Lehrplan unterliegt.

Problembeschreibung und Relevanz

Die Mathematik, wie sie heute in der Schule gelehrt wird, basiert auf jahrhundertelanger wissenschaftlicher Entwicklung. Einer der bedeutendsten Mathematiker dieser Geschichte ist Leonhard Euler (1707–1783), dessen Beiträge die moderne Mathematik maßgeblich geprägt haben. Seine Arbeiten zur Analysis, Zahlentheorie, Graphentheorie und Mechanik sind nicht nur von theoretischer Bedeutung, sondern auch heute noch grundlegend für viele mathematische Lehrinhalte. Euler führte wichtige Notationen ein, entwickelte zentrale Konzepte der Differential- und Integralrechnung und legte den Grundstein für die Graphentheorie mit seinem berühmten „Königsberger Brückenproblem".

Obwohl Euler einer der produktivsten Mathematiker der Geschichte war, stellt sich die Frage, inwieweit seine Erkenntnisse explizit in den modernen Mathematikunterricht eingeflossen sind. Insbesondere der sächsische Lehrplan für das Berufliche Gymnasium enthält viele Themenbereiche, die auf Eulers Arbeiten zurückgehen. Dennoch ist oft unklar, inwiefern seine Beiträge bewusst im Unterricht vermittelt

werden oder ob sie eher indirekt durch die allgemeine mathematische Entwicklung präsent sind.

Die Relevanz dieser Fragestellung ergibt sich aus der Bedeutung eines historischen Verständnisses in der Mathematikdidaktik. Während viele mathematische Konzepte als abstrakt vermittelt werden, könnte ein Bezug zur historischen Entwicklung helfen, Zusammenhänge verständlicher zu machen und das Interesse der Schüler an der Mathematik zu fördern. Diese Arbeit untersucht daher die Einflüsse von Eulers Arbeiten auf den heutigen Lehrplan und bewertet, ob und wie seine Konzepte im Schulunterricht aufgegriffen werden.

Fragestellung

„Inwieweit spiegeln die Inhalte des sächsischen Lehrplans für das Berufliche Gymnasium die mathematischen Erkenntnisse Leonhard Eulers wider?“

Dabei wird untersucht, welche seiner Konzepte im aktuellen Lehrplan verankert sind und in welcher Form sie vermittelt werden. Zudem wird analysiert, ob Euler in Schulbüchern oder Unterrichtsmaterialien explizit erwähnt wird oder ob sein Einfluss eher implizit durch die mathematische Standardnotation und Theorien besteht.

Methodik

Zur Beantwortung der Fragestellung wird eine theoretische Analyse durchgeführt. Zunächst werden die wichtigsten mathematischen

Beiträge Leonhard Eulers zusammengefasst und in den historischen Kontext eingeordnet. Anschließend erfolgt ein Vergleich mit dem aktuellen sächsischen Lehrplan für das Berufliche Gymnasium, insbesondere mit den Bereichen Analysis, Lineare Algebra und Diskrete Mathematik. Dazu werden offizielle Lehrplandokumente und Schulbücher herangezogen, um Parallelen zu Eulers Arbeiten aufzuzeigen.

Ergänzend wird eine Schüler Umfrage, um zu verdeutlichen ob Leonard Euler ein Begriff für die Schüler ist bzw. inwiefern die Schüler über Ihnen Bescheid wissen. Die gewonnenen Erkenntnisse werden schließlich im Fazit zusammengeführt und hinsichtlich möglicher Verbesserungen oder didaktischer Ergänzungen reflektiert.

Diese Arbeit trägt somit dazu bei, den Einfluss historischer Mathematiker auf den heutigen Schulunterricht zu verdeutlichen und mögliche Ansätze für eine stärkere Integration mathematischer Geschichte in den Lehrplan zu diskutieren.

2. Leonard Eulers zentrale Beiträge zur. Mathematik

Zuerst wird auf Lerners Eulers zentrale Mathematischen Beiträge eingegangen, um zu zeigen welche Ausmaße er auf die heutige Mathematik hat.

2.1. Analysis

2.1.1. f(x)

Einer von Eulers grundlegenden Beiträgen zur Analysis war die formale Einführung des Funktionsbegriffs. In seinem Werk Introductio in analysin infinitorum definierte er eine Funktion als eine mathematische Abbildung einer Variablen auf einen Wert. Er verwendete erstmals die heute gebräuchliche Schreibweise f(x) zur Darstellung von Funktionen (Euler, 1748). Dies war ein entscheidender Schritt zur Formalisierung der Analysis, da er eine allgemeine Notation einführte, die von algebraischen Ausdrücken losgelöst war.

2.1.2. Unendliche Reihen und ihre Konvergenz

Euler untersuchte ausführlich unendliche Reihen und legte damit die Grundlage für spätere Konvergenzkriterien. Er löste das sogenannte Basler Problem, indem er die Summe der unendlichen Reihe der

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Kehrwerte der Quadratzahlen bestimmte:

Dieses Ergebnis wurde später durch rigorose Beweise gefestigt (Kline, 1972). Euler erarbeitete auch zahlreiche Potenzreihenentwicklungen für Funktionen wie sin x, cos x und tan x und nutzte diese zur Näherungsberechnung wichtiger mathematischer Konstanten.

2.1.3. Entwicklung der exponential- und Logarithmusfunktionen

Ein besonders einflussreicher Beitrag Eulers war seine Arbeit zur Exponentialfunktion und deren Erweiterung auf komplexe Zahlen. Er zeigte, dass die Exponentialfunktion mit trigonometrischen Funktionen verknüpft werden kann und bewies die nach ihm benannte Eulersche Formel:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Diese Beziehung ermöglichte eine tiefere Untersuchung der komplexen Analysis und war richtungsweisend für die spätere Entwicklung der Funktionentheorie (Euler, 1748). Ein Spezialfall dieser Gleichung ist die berühmte Eulersche Identität:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

welche oft als eine der schönsten Gleichungen der Mathematik bezeichnet wird.

2.1.4. Die Eulersche Gammafunktion

Euler verallgemeinerte die Fakultätsfunktion auf nicht-ganzzahlige Werte durch die Einführung der Gammafunktion, die er durch folgendes Integral definierte:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Diese Funktion spielt heute eine zentrale Rolle in der Analysis, Zahlentheorie und Stochastik.

2.1.5. Differential und Integralrechnung

Euler leistete bedeutende Beiträge zur Differential- und Integralrechnung. In seinem Werk Institutiones calculi differentialis (1755) popularisierte er die heute gebräuchliche Notation der Ableitung f(x). Er untersuchte Differentialgleichungen systematisch und entwickelte Methoden zu ihrer Lösung, darunter die Methode der Variation der Konstanten. Sein Werk Institutiones calculi integralis (1768–1770) war eine der ersten umfassenden Darstellungen der Integralrechnung. Euler untersuchte verschiedene

Integrationsmethoden und entwickelte spezielle Integrale, die später in der mathematischen Physik Anwendung fanden.

2.1.6. Die Variationsrechnung und Eulers Gleichung

Euler begründete zusammen mit Lagrange die Variationsrechnung und leitete die Euler-Lagrange-Gleichung her:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Diese Gleichung ist bis heute eine fundamentale Grundlage in der Mechanik und Variationsrechnung.

2.2. Eulersche zahl e

2.2.1. Definition und Ursprung

Die Eulersche Zahl e ist eine der wichtigsten mathematischen Konstanten und hat zahlreiche Anwendungen in Analysis, Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Naturwissenschaften.

Sie ist definiert als die Basis des natürlichen Logarithmus und beträgt ungefähr:

$$e \approx 2,718281828459045$$

Diese Zahl ist irrational (sie kann nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen ausgedrückt werden) und transzendent (sie ist keine Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten).

Euler selbst entdeckte die Zahl nicht, aber er war der Erste, der ihre Bedeutung vollständig erkannte und systematisch untersuchte. Der ursprüngliche Zusammenhang entstand in der Finanzmathematik durch das Problem des Zinseszinses:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Diese Formel beschreibt den kontinuierlichen Zinseszins, der sich bei immer kleiner werdenden Zinsintervallen ergibt.

2.2.2. Mathematische Definitionen von e

Es gibt mehrere äquivalente Definitionen für die Zahl e:

• Grenzwertdefinition (Zinseszinsmodell):

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

• Reihendarstellung (Taylorreihe der Exponentialfunktion):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$$

• Differentialgleichung:

Die Funktion f(x)= e^x ist die einzige Funktion, die sich selbst ableitet, hat:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Diese Darstellung ist eine zentrale Funktion in der Analysis

• Integraldefinition:

$$e = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

Dies ergibt sich aus der natürlichen Logarithmusfunktion, da e die Basis des natürlichen Logarithmus ln(x) ist.

2.2.3. Eigenschaften von e

• **Irrationalität und Transzendenz**: Euler bewies, dass e irrational ist.

• **Exponentialfunktion als Potenzreihe:** Die Funktion e^x kann durch die unendliche Reihe dargestellt werden:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Diese Darstellung ist eine der zentralen Funktionen in der Analysis.

• **Die Euler-Identität**: Eine der berühmtesten Formeln der Mathematik ist:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Sie verbindet die wichtigsten mathematischen Konstanten: $e, i, \pi, 1,$ und 0.

2.2.4. Anwendungen von e

• **Analysis und Differentialgleichungen**

Da die Ableitung von e^x gleich der Funktion selbst ist, spielt sie eine zentrale Rolle in der Lösung von Differentialgleichungen, insbesondere in Physik und Technik.

• **Finanzmathematik**

Die kontinuierliche Verzinsung basiert auf der Formel:

$A = Pe^{rt}$ wobei A das Endkapital, P das Startkapital, r der Zinssatz und t die Zeit ist.

- **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Euler entdeckte, dass die Wahrscheinlichkeit, dass kein Treffer in einer bestimmten Zufallsverteilung auftritt, gegen 1/e geht. Beispielsweise beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass kein einziger Brief in einem zufälligen Zuordnungsproblem richtig zugestellt wird, etwa 1/e.

- **Physik und Naturwissenschaften**

Die Zahl e erscheint in exponentiellen Wachstumsprozessen, Zerfallsprozessen (radioaktiver Zerfall) und der Gaußschen Normalverteilung.

2.3. Eulers Einfluss auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.3.1. Derangements-Problem: Wahrscheinlichkeit des falschen Zuordnens

Eines der bekanntesten Probleme, zu dem Euler beitrug, ist das Derangements-Problem (auch als „Briefträgerproblem“ bekannt). Es beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufälligen Permutation kein Element an seinen ursprünglichen Platz zurückkehrt.

$$P(n) = \frac{n!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}} \approx \frac{1}{e}$$

Er zeigte, dass die Wahrscheinlichkeit für ein vollständiges Derangement (keine Übereinstimmungen) bei n Objekten gegen den Grenzwert

konvergiert, wobei $e \approx 2,718$ die Eulersche Zahl ist.

Diese Erkenntnis hat zahlreiche Anwendungen, zum Beispiel in der Kryptographie, der Statistik und der Optimierungstheorie.

2.3.2. Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Euler erkannte, dass es enge Verbindungen zwischen Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeiten gibt. Er untersuchte zum Beispiel Primzahlverteilungen und erkannte, dass Reihenentwicklungen von Wahrscheinlichkeiten ähnliche Strukturen wie unendliche Produkte über Primzahlen aufweisen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Ein Beispiel hierfür ist seine berühmte Produktformel für die Riemannsche Zeta-Funktion:

Diese Formel spielt eine Rolle bei der statistischen Untersuchung von Primzahlen und der Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Zahl prim ist.

2.3.3. Arbeiten zur lotterie- und Glücksspieltheorie

Euler beschäftigte sich auch mit Wahrscheinlichkeitsmodellen für Lotterien und Glücksspiele. Er analysierte mathematische Strukturen hinter Zufallsziehungen und erweiterte frühere Arbeiten von Jakob Bernoulli und Abraham de Moivre. Besonders wichtig war seine Arbeit zur Hypergeometrischen Verteilung, die heute bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ohne Zurücklegen (z. B. bei Karten- und Ziehspielen) eine Rolle spielt.

2.3.4. Analysis der Binomialverteilung

Euler untersuchte die Binomialverteilung, insbesondere ihre unendlichen Reihenentwicklungen. Er legte damit Grundlagen für spätere Untersuchungen zur normalen Approximation der Binomialverteilung (ein Schlüsselkonzept in der modernen Statistik).

3. Vergleichen des sächsischen Lehrplans mit Eulers Beiträgen zur Mathematik

Im Folgenden werden die mathematischen Beiträge Leonhard Eulers mit dem sächsischen Lehrplan des beruflichen Gymnasiums verglichen. Auf dieser Grundlage wird analysiert, inwiefern seine Erkenntnisse in den Lehrplan für Mathematik integriert sind und welche Relevanz sie für den Unterricht haben.

Klassenstufe 11:

- Lernbereich 3: Funktionale Zusammenhänge (75 Ustd.)

  - Exponentialfunktionen: Behandlung von (e^x) und natürlichem Logarithmus (Eulersche Zahl).

- Komplexe Zahlen: Euler’sche Darstellung ä (Wahlbereich 4).

- Sinusfunktionen: Euler-Formel als Verbindung zu trigonometrischen Funktionen.

- Lernbereich 4: Lineare Gleichungssysteme und Matrizen (20 Ustd.)

- Matrizenrechnung (Euler nutzte Matrizen in linearen Transformationen).

Jahrgangsstufen 12/13 – Grundkurs/Leistungskurs:

- Differenzialrechnung (72/95 Ustd.):

- Ableitungsbegriff (Euler prägte die Notation dy/dx).

- Extremwertprobleme: Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen (implizit).

- Integralrechnung (36/38 Ustd.):

  - Hauptsatz der Analysis (Euler verfeinerte die Integralrechnung).

- Vektorgeometrie (20 Ustd.):

- Vektoren in der Ebene/Raum (Euler arbeitete mit räumlichen Koordinatensystemen).

- Wahlpflichtbereiche:

- Analytische Geometrie: Euler’sche Geraden/Ebenen-Darstellungen.
- Komplexe Zahlen: Vertiefung der Euler-Formel (LK).

4.1. Begründung für die Umfrage

Die durchgeführte Umfrage dient dazu, festzustellen, inwieweit und in welchem Ausmaß Leonhard Euler den Schülern eines beruflichen Gymnasiums in den Fachrichtungen Gesundheit und Soziales sowie Wirtschaft bekannt ist. Zudem wird untersucht, ob zwischen diesen beiden Fachrichtungen Unterschiede in der Bekanntheit Eulers bestehen und inwiefern sein Einfluss im sächsischen Lehrplan verankert ist.

Die Untersuchung basiert auf der Annahme, dass das Vorwissen und die Interessen der Schüler je nach Fachrichtung variieren können. Dabei wird angenommen, dass Euler insbesondere den Schülern der Fachrichtung Wirtschaft bekannter ist und sie ihn eher mit dem sächsischen Lehrplan in Verbindung bringen können als ihre Mitschüler aus dem Bereich Gesundheit und Soziales. Mögliche Unterschiede in der Bekanntheit und Wahrnehmung seiner Relevanz könnten sich aus den unterschiedlichen Schwerpunkten der jeweiligen Fachrichtungen ergeben, sowie Vorwissen und Interessen der jeweiligen Schüler.

4.2. Auswertung der Umfrage

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Umfrage unter insgesamt 60 Schülerinnen und Schülern eines beruflichen Gymnasiums durchgeführt. Ziel war es, herauszufinden, inwieweit Leonhard Euler den Schülern bekannt ist, in welchem Kontext er im Unterricht thematisiert wird und ob sich dabei Unterschiede zwischen den beiden Fachrichtungen Wirtschaft sowie Gesundheit und Soziales erkennen lassen. Die Auswahl der beiden Fachrichtungen erfolgte bewusst, da sie jeweils unterschiedliche inhaltliche Schwerpunkte setzen, die sich auch auf das mathematische Vorwissen und Interesse der Schüler auswirken könnten.

4.3. Bekanntheitsgrad von Leonhard Euler

Die erste Frage der Umfrage richtete sich auf die grundsätzliche Bekanntheit Leonhard Eulers. Dabei gaben 73 % der Schüler aus der Fachrichtung Wirtschaft an, Euler zu kennen. In der Fachrichtung Gesundheit und Soziales waren es hingegen nur 37 %. Diese deutliche Differenz legt nahe, dass Euler in der wirtschaftlich orientierten Fachrichtung deutlich präsenter ist. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass wirtschaftliche Bildung häufig einen stärkeren Bezug zur Mathematik aufweist, in der Euler als bedeutende historische Figur regelmäßig thematisiert wird. In gesundheits- und sozialwissenschaftlich ausgerichteten

Bildungsgängen steht dagegen die Mathematik seltener im Vordergrund, was sich offensichtlich in einem geringeren Bekanntheitsgrad widerspiegelt.

4.4. Kontext der Nennung im Unterricht

Auf die Frage, in welchem Zusammenhang Euler im Unterricht erwähnt wurde, nannten die meisten Schüler der Fachrichtung Wirtschaft das Fach Mathematik. 60 % ordneten ihn diesem Fach eindeutig zu, vereinzelt wurde auch Geschichte genannt. In der Fachrichtung Gesundheit und Soziales waren die Angaben deutlich uneinheitlicher. Nur wenige konnten den Zusammenhang konkret benennen; manche gaben Geschichte oder ein anderes Fach an, ein erheblicher Teil machte keine Angabe oder gab an, sich nicht zu erinnern. Dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass Euler in der Fachrichtung Gesundheit und Soziales, wenn überhaupt, nur am Rande behandelt wird, was die geringere Vertrautheit mit seiner Person weiter erklärt.

4.5. Wahrnehmung der wissenschaftlichen Relevanz

Ein weiterer Aspekt der Umfrage war die subjektive Einschätzung der wissenschaftlichen Bedeutung Leonhard Eulers. Auf einer Skala von 1 (unwichtig) bis 5 (sehr wichtig) bewerteten Schüler aus der Fachrichtung Wirtschaft Euler mit einem Durchschnittswert von 4,1. Die Schüler der Fachrichtung Gesundheit und Soziales vergaben im Schnitt lediglich 3,2 Punkte. Die höhere Bewertung durch die Wirtschaftsschüler ist ein weiterer Hinweis auf deren größeres Vorwissen und Verständnis für Eulers Leistungen in der Mathematik. Gleichzeitig zeigt die niedrigere Bewertung durch die andere Fachrichtung, dass Euler dort eine geringere Rolle spielt oder sein Beitrag zur Wissenschaft nicht in gleichem Maße erkannt wird.

4.6. Thematisierung im Unterricht

Abschließend wurde erfragt, ob Euler im Unterricht ausdrücklich behandelt wurde. Auch hier zeigten sich deutliche Unterschiede: In der Fachrichtung Wirtschaft gaben 57 % der Schüler an, sich an eine konkrete Behandlung Eulers im Unterricht zu erinnern. In der Fachrichtung Gesundheit und Soziales lag dieser Wert lediglich bei 20 %. Ein erheblicher Teil der Schüler dieser Fachrichtung konnte keine eindeutige Aussage treffen oder war sich unsicher. Dies unterstreicht nochmals die unterschiedlichen curricularen Schwerpunkte beider Fachrichtungen.

4.7. Gesamtbewertung

Die Ergebnisse der Umfrage bestätigen in deutlicher Weise die eingangs formulierter Annahme, dass sich die Bekanntheit und Wahrnehmung historischer Persönlichkeiten wie Leonhard Euler je nach Fachrichtung erheblich unterscheiden können. Die wirtschaftlich orientierten Schüler sind mit Euler vertrauter, können ihn eher einem schulischen Kontext zuordnen und bewerten seine wissenschaftliche Bedeutung höher. Dies lässt sich sowohl durch die stärkere mathematische Ausrichtung der Fachrichtung Wirtschaft als auch durch die damit verbundenen Interessen und Unterrichtsinhalte erklären.

Die Fachrichtung Gesundheit und Soziales hingegen zeigt eine geringere Vertrautheit mit Euler, was auf eine weniger zentrale Rolle mathematischer Inhalte in diesem Bildungsgang schließen lässt. Die Ergebnisse belegen somit nicht nur Unterschiede im Vorwissen, sondern auch im fachspezifischen Zugang zu wissenschaftlicher Geschichte und deren Repräsentanten.